

Puntos con distribución Poisson disk y su uso en NPR

Ascencio-Lopez Ignacio (1), Hidalgo-Silva Hugo(2), Meruvia-Pastor Oscar(3)

1. Facultad de Ciencias, UABC Ensenada, Mexico, Email: ascencio@uabc.mx

2. Centro de Investigacion Cientifica y de Educacion Superior de Ensenada

3. Thompson Rivers University, Kamloops, British Columbia, Canada

Abstract—En este artículo se describen los principales métodos para calcular un conjunto de puntos con distribución Poisson disk y se presenta su uso en la producción de imágenes no-fotorrealistas como el stippling y el puntillismo.

I. INTRODUCCIÓN

Muchos tópicos de cómputo gráfico tienen que ver directa o indirectamente con las técnicas de muestreo. Los patrones que se producen con alguna distribución se usan en una variedad de contextos como el antialiasing, la distribución del trazado de rayos, trayectorias de trazo usando Monte Carlo, procesamiento geométrico, regeneración y modelado basado en puntos, halftoning digital, posicionamiento de objetos, producción de texturas por proceso, y el posicionamiento de primitivos gráficos en regeneraciones no-fotorrealistas.

En muchos de sus usos, un tema importante es la calidad visual de los patrones resultantes, fundamentalmente la ausencia en la percepción de repeticiones. Las medidas de calidad son asociadas con características espectrales de la distribución. En particular la distribución Poisson disk está asociada con el *ruido azul* en el espectro de Fourier que en otras secciones de este trabajo se describe a detalle.

Por teoría de muestreo se predice que si se realiza el muestreo en una forma regular (como utilizando una malla), las frecuencias contenidas en la imagen que son mayores a un límite dado formarán un alias. Alias en el contexto del cómputo gráfico, (el proceso de señales, la estadística y áreas afines), entendida como el efecto que causa que señales continuas distintas se tornen indistinguibles cuando se les muestrea digitalmente (Wikipedia 2007). La coherencia en las muestras interfiere con la coherencia en la imagen para producir errores llamados alias. Si se realiza el muestreo en manera irregular pero controlada, entonces las altas frecuencias podrán aparecer en la imagen como ruido en lugar de aparecer como alias. Esta perturbación del muestreo y el ruido que resulta al aplicarlo, es un tipo de muestreo estocástico.

A. Muestreo estocástico.

En el muestreo estocástico, cada punto tiene una probabilidad finita de ser elegido. El ojo humano contiene un arreglo de fotorreceptores distribuidos de manera no-uniforme y por esta razón al realizarse la visualización no se produce el efecto alias.

El tipo de aleatoriedad usada en cada caso determina las características espectrales de cómo el ruido se dispersa en

las altas frecuencias. Se describen enseguida tres tipos de patrones no-uniformes:

- Poisson

Este patrón se genera al agregar puntos en posiciones aleatorias hasta que se alcance la densidad deseada (o hasta que la superficie se llena). Los coeficientes en el espacio de Fourier son también aleatorios, distribuidos sobre todas las frecuencias. Por ello, no es muy usado como filtro ya que no discrimina entre altas y bajas frecuencias (también llamado ruido blanco).

- Poisson disk

Es una generalización del muestreo con distribución Poisson, donde cada punto muestra satisface la restricción de una distancia mínima. Este patrón se forma por la generación de puntos uniformemente distribuidos como en el muestreo Poisson, y se retienen aquellos que satisfacen la restricción de distancia mínima. El método original es costoso en extremo, pero hay algunas estrategias novedosas que lo resuelven en tiempo lineal. En el dominio de Fourier, esta distribución se conoce como ruido azul. Este ruido azul se caracteriza por la concentración de energía desde el origen y alrededor de algún radio, en el espacio de frecuencias.

- Jittered

Se realiza perturbando la posición de muestra que está espaciada con regularidad. El patrón Jittered es menos elegante en apariencia y aproxima la distribución Poisson disk pero utiliza radios de disco menores. Esto incrementa el ruido en bajas frecuencias porque la imagen tratada con este filtro esparce las altas frecuencias sobre las bajas frecuencias. Esto es importante porque el sistema visual humano es más sensible a las bajas frecuencias y por ello Jittering es inferior al muestreo por Poisson disk. La misma imagen aparece con mayor ruido al usar el muestreo Jittered que al utilizar la distribución Poisson disk.

El muestreo jittering involucra corrimientos aleatorios del muestreo uniforme en las dos variables espaciales por lo que no requiere grandes recursos para su almacenamiento en comparación con Poisson disk

B. La Distribución Poisson disk

La Distribución Poisson es una distribución de probabilidad discreta que expresa la probabilidad de un número de eventos ocurriendo en un periodo de tiempo fijo, si esos eventos

ocurren con una tasa promedio conocida, y donde es independiente al tiempo desde el último evento (Wikipedia 2007). La distribución Poisson puede utilizarse en otros intervalos específicos como: distancia, área o volumen. Un ejemplo clásico es su aplicación para calcular la probabilidad de un cierto número de bombas lanzadas en forma aleatoria en un región elegida de un grupo de regiones de igual área (usado en la segunda guerra mundial: German V-1 buzz). En papel, el sur de Londres fue dividido geográficamente en 576 regiones cada una con 0.25 km². Asumiendo las 535 bombas lanzadas al sur de Londres, con lanzamientos de blanco aleatorio. Entonces, la probabilidad de que cualquier número de bombas (0 a 535) caigan en una región (de las 576), en forma aleatoria, puede ser calculada. Con el uso de la distribución Poisson, la media λ , es el cociente del número de bombas dividido entre el número de regiones. La probabilidad de que sucedan exactamente k ocurrencias está dada por

$$f(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots$$

La distribución Poisson disk genera el patrón de distribución ideal en la Teoría del muestreo estocástico, limitada solo por los altos costos de cálculo si se usan los algoritmos básicos.

II. TÉCNICAS PARA PRODUCIR LA DISTRIBUCIÓN POISSON DISK

La distribución Poisson disk es una distribución uniforme de puntos 2D en la cual todos los puntos están separados por una distancia mínima. La mitad de esa distancia se conoce como radio de la distribución. Un conjunto de puntos tendrá una distribución Poisson disk si se coloca un disco con el radio correspondiente en cada posición sin que se den traslapes entre los discos.

Para generar un conjunto de puntos con distribución Poisson disk, comúnmente se usa el algoritmo “lanzamiento de dardos” (Cook 1986). Este algoritmo genera un punto en posición aleatoria con distribución uniforme, y se rechaza si no satisface la condición de separación mínima con los puntos previamente generados. Este proceso continua hasta que no se puedan agregar mas puntos. Como puede advertirse, es un algoritmo complejo y difícil de controlar; pues en lugar de especificar el número de puntos necesarios, se proporciona el radio que la distribución habrá de observar, y por ello resulta difícil predecir cuál será el número total de puntos en la distribución. Y si el proceso se detiene de forma temprana, la densidad de los puntos no es uniforme.

McCool y Fiume (1992) propusieron una versión mejorada del algoritmo *lanzamiento de dardos* el cual se conoce como “relajación del lanzamiento de dardos”. Los puntos se colocan inicialmente con un radio grande, y cuando no hay mas espacio para un mayor número de puntos, el radio se reduce en alguna razón. Este algoritmo tiene varias ventajas comparado al inicial: es más rápido, permite especificar el número de puntos deseados (en lugar del radio), y la terminación se garantiza. La distribución de los puntos generados por ambos algoritmos es usualmente toroidal.

Después de que la distribución Poisson disk se generó, McCool y Fiume (1992) aplican la relajación de Lloyd, para evitar el problema de considerar radios muy pequeños. Este postproceso minimiza la diferencia entre la distancia mínima y máxima.

La colocación de los círculos en el plano toma una forma hexagonal. Si partimos con una configuración formada discos de radio máximo r_{max} , el radio r de una distribución Poisson disk puede escribirse como

$$r = \alpha r_{max}$$

con $\alpha \in [0 \dots 1]$. Un conjunto de puntos uniformemente distribuidos tienen un valor de α igual a cero, y para valores con disposición hexagonal α es 1.

Las distribuciones Poisson disk pueden tomar valores grandes para α ($\alpha \geq 0.6$), pero no tan grandes ($\alpha \leq 0.9$), para evitar configuraciones regulares.

Es posible producir resultados similares a los alcanzados por la relajación del lanzamiento de dados usando el método de Lloyds directamente sobre un conjunto de puntos generados aleatoriamente con distribución uniforme, como lo indica Hiller et al 2001.

A. Algoritmos basados en tiling

La generación de grandes conjuntos de puntos con distribución Poisson disk mediante la técnica de lanzamiento relajado de dardos o por el uso directo del método de Lloyd sobre posiciones aleatorias, resulta un proceso bastante lento, del orden de pocos miles de puntos por minuto.

El concepto de tiling o mosaico describe la forma en que se cubre un plano Euclidiano infinito con un conjunto de polígonos de manera que no se dejan espacios sin cubrir y no se dan traslapes entre ellos. Cada polígono es un tile, y las reglas del tiling describen cómo colocar cada tile uno enseguida del otro.

Es posible utilizar el tiling para llenar espacios muy grandes (virtualmente infinitos) donde cada tile contengan un pequeño conjunto de puntos con distribución Poisson disk, y al repetir periódicamente los tiles, se llene el plano con puntos. Desafortunadamente, el uso de tiles periódicos, repercute en la formación de artefactos o patrones de puntos repetitivos que se evidencia con una alta anisotropía en el espectro de Fourier como se muestra en la figura 1.

Dagae y Dutré (2005) como Kopf et al (2006), proponen estrategias para formar tiling no-periódico utilizando tiles Wang.

Un tile Wang es un cuadro con códigos o colores asociados a cada arista. Para construir un tiling válido utilizando tiles Wang, hay que colocarlos de manera tal, que todas las aristas contiguas deben coincidir en color (no se permite rotar el tile). Con un conjunto suficientemente grande de tiles se puede acomodar sin formar periodos (Berger 1966). Cohen et al (2003) utilizaron un conjunto de 8 tiles para formar tiling no-periódico (ver figura 3). Cada tile tiene asociados dos colores en las aristas horizontales y dos colores para las aristas verticales y con ellos es posible construir un conjunto de 16 tiles diferentes (utilizados también por Dagae y Dutré 2005).

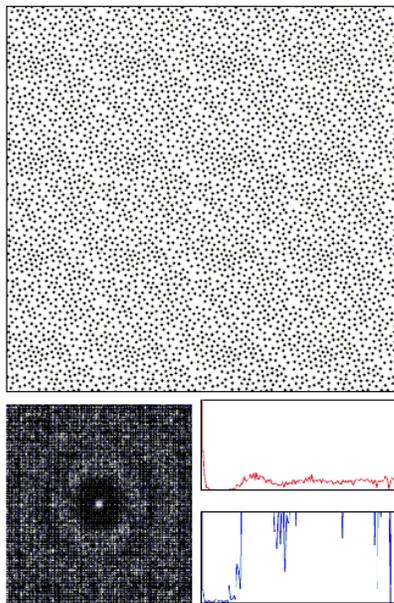


Fig. 1. Puntos generados mediante la repetición periódica de tiles, Espectro, Periodograma y Anisotropía.

Cohen et al 2003 proponen un procedimiento estocástico para crear el tiling: los tiles se colocan en orden, de oeste a este y de norte a sur. El primer tile se elige en forma aleatoria y el primer renglón de tiles se completa agregando tiles cuya arista O coincida con la arista de su izquierda. El primer tile de las líneas siguientes se elige de forma que su arista N coincida en color con la arista de arriba. El resto de tiles se eligen entre aquellos cuya arista N coincida con la arista de arriba y su arista O concida con la izquierda. Al elegir un tile se hace de manera aleatoria entre aquellos que cumplen las restricciones. Usando K colores para las aristas es posible formar un conjunto de K^4 tiles, y cada tile del cuerpo principal puede elegirse dentro de K^2 combinaciones, mientras que los que tienen una sola restricción o arista con que coincidir se eligen entre $2K^2$ combinaciones. La figura 2 muestra un conjunto con $K=2$ (dos colores para aristas horizontales y 2 para verticales) y un ejemplo de tiling válido.

1) *Tiles con distribución Poisson disk*: Para colocar un número grande de puntos en un plano de dimensiones virtualmente infinitas, es necesario crear un conjunto de tiles Wang con los puntos. La idea general consiste en colocar puntos con distribución Poisson disk en cada tile, resolviendo la distribución en los bordes y esquinas de los tiles para su adecuado ensamble, con lo que se posibilita la repetición de los subconjuntos de puntos (correspondientes a cada tipo de tile) sin formar repeticiones. Kopf et al 2006 alcanzan velocidades del orden de millones de puntos por segundo, una vez que se calcularon los tiles base.

Por la influencia de la vecindad, se provoca que al llenar un tile con puntos, pocos de ellos se coloquen en los bordes y las esquinas como restricciones. Esto arroja una baja densidad de puntos en estas regiones. Dagee y Dutré (2005) presenta un

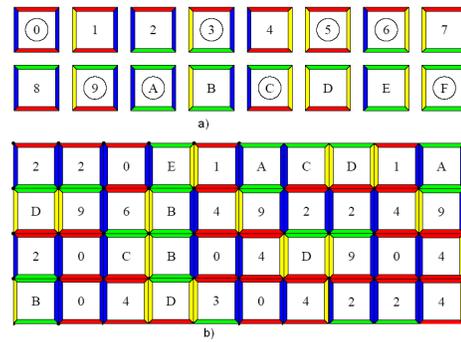


Fig. 2. a) Conjunto completo de tiles Wang, los tiles marcados con circunferencia es el subconjunto usado por Cohen et al 2003. b) Pequeña porción del plano con un tiling válido

procedimiento donde calculan primero los puntos que habrán de colocarse en los bordes de cada color utilizando *lanzamiento de dardos relajado*, después, dejando fijos los cuatro bordes que limitan una esquina, nuevamente con *lanzamiento de dardos relajado* se calculan los puntos que estarán en las esquinas y finalmente, dejando los puntos en bordes y esquinas, se llena el cuerpo del tile. El procedimiento se muestra en la figura 3.

Por su parte Kopf et al (2006) utilizan un tile base con los puntos calculados con *lanzamiento de dardos relajado*. Inicia con un tile T que se mezcla con otros tiles correspondientes en su color de bordes E, N, O, S. Par mezclar por ejemplo el tile T con su vecino E se calcula los puntos de la región de influencia conjunta llamada *junta* o *seam*. La meta es lograr que en esta región se eviten puntos demasiado cercanos. Para ello calculan el diagrama Voronoi de la unión de los puntos $T \cup E$ y se utiliza una función que penalice las distancias cortas. Observar en la figura 4 el proceso de mezcla de los tiles, donde T se mezcla con el tile E que corresponde en el color de su ariste este (rosa). De colores se muestra las regiones de junta.

Con cualquiera de los dos procedimientos, el resultado es una secuencia progresiva de puntos con distribución Poisson disk, con la que pueden cubrirse porciones del plano arbitrariamente grandes, con una buena calidad espectral y en tiempos tan cortos como los requeridos para realizar el tiling. Específicamente, en una secuencia progresiva de puntos con tiling Wang, la anisotropía es muy baja y la energía radial media es cercana al perfil del *ruido azul* deseado (Kopf et al, 2006).

Sin embargo en zonas de densidad altas (que pueden ser generadas por escalamientos de la imagen), la cantidad de puntos de un tile pueden no ser suficientes. Kopf et al (2006) presentan un procedimiento mediante el cual se producen Tiles Wang de manera recursiva. Con este procedimiento es posible generar densidades arbitrariamente altas usando una subdivisión recursiva. La subdivisión reemplaza un tile base por una malla de $n \times n$ vecinos escalados del mismo conjunto.

Cuando dividimos un tile base, el arreglo resultante de $n \times n$

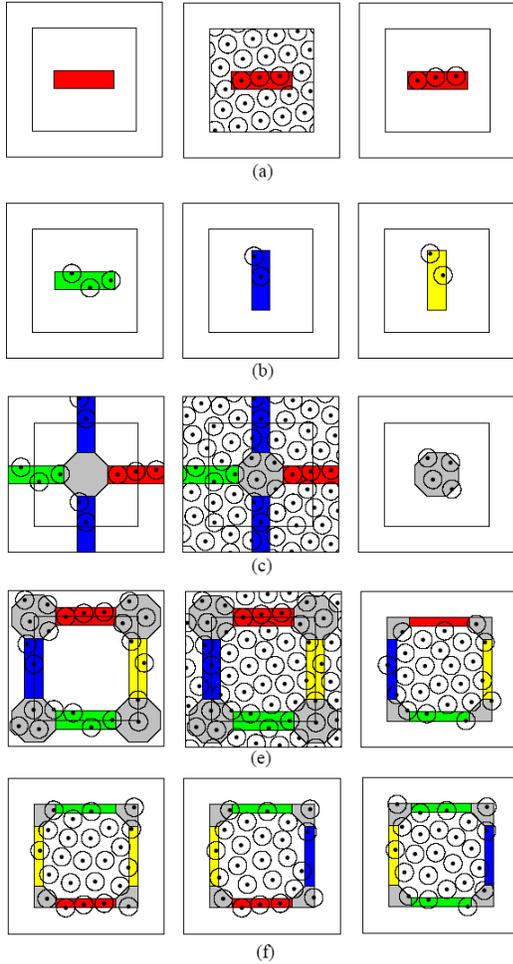


Fig. 3. a) Construcción de una arista con distribución Poisson disk. b) Conjunto completo de aristas. c) Formación de una esquina. d) Construcción de un tile con lanzamiento de dardos relajado. (Dagae y Dutré 2005).

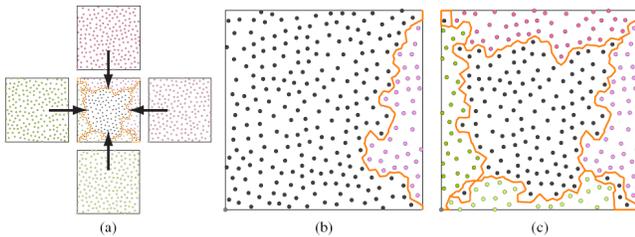


Fig. 4. Mezcla de tiles fuente para formar los tiles base con distribución Poisson disk por procedimiento de Kopf et al 2006. a) Después de mezclar un tile con los tiles adyacentes. b) Después de asociar el tile T con su vecino del este. c) Después de mezclarse con todos los vecinos. Note que los puntos negros vienen de la distribución inicial. (Kopf et al, 2006)

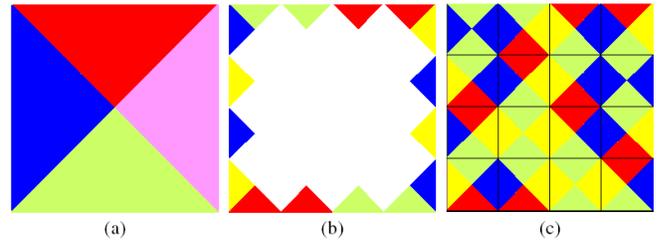


Fig. 5. División recursiva de un tile. a) tile base. b) Restricciones de color en la frontera. c) división completa con 16 tiles. (Kopf et al, 2006)

subtiles deben respetar las restricciones de color de un tiling válido. Estas restricciones son establecidas entre las fronteras de las subdivisiones con tiles adyacentes y en las aristas de los subtiles en el interior del tile base (ver figura 5). La primera restricción la resolvieron colocando secuencias de color únicas en los bordes, para el interior del tile base, siempre es posible encontrar una configuración cuando se utiliza todo el conjunto completo de tiles (K^4 para K colores de aristas). Kopf et al usan al final un proceso de relajación dejando fijas las posiciones de los puntos en el tile base.

El tiling de Wang permite además asociar un valor ordinal a cada punto como lo hace el lanzamiento de dardos. Si se producen los puntos por tiling, al usar varios tiles en la secuencia progresiva, se consideran los valores ordinales de los tiles fuente, resolviendo conflictos (puntos de diferente tile con el mismo valor ordinal) en una forma aleatoria. Esto entrelaza las secuencias originales para producir una sola y nueva secuencia.

B. Características de una Distribución Poisson disk

Las características de la distribución de puntos en el dominio de frecuencias son analizadas utilizando técnicas de Fourier (Ulichney 1987)

El periodograma de la distribución de N puntos $\{x_0, \dots, x_{N-1}\} \subset [0, 1]^2$ estima el espectro de energía de la distribución y está dado por

$$R_f(\vec{\omega}) = \left| F \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - x_j) \right|^2,$$

Donde F denota la transformada de Fourier y δ es la función delta Dirac. El periodograma de una distribución de Poisson disk es radialmente simétrica. De ahí se pueden derivar un par de estadísticas unidimensionales: la primera la media radial del espectro de energía

$$P_i = \frac{1}{S_i} \int_0^{2\pi} \int_{f_i}^{f_{i+1}} R_f(f \cos \theta, f \sin \theta) f df d\theta$$

La cual mide la media radial de energía en un conjunto de anillos concéntricos definidos por los intervalos de frecuencia $[f_i, f_{i+1}]$. S_i es el área del anillo i , y está dado por $\pi(f_{i+1}^2 - f_i^2)$. La otra medida estadística es la *anisotropía* $A_i = s_i^2/P_i^2$ para cada anillo, donde

$$s_i^2 = \frac{1}{S_i} \int_0^{2\pi} \int_{f_i}^{f_{i+1}} (R_f(f \cos \theta, f \sin \theta) - P_i)^2 df d\theta$$

La anisotropía es una medida para la simetría radial de la distribución de la energía. Esta medida determina cuando el conjunto de puntos tiene características estadísticas similares en diferentes direcciones.

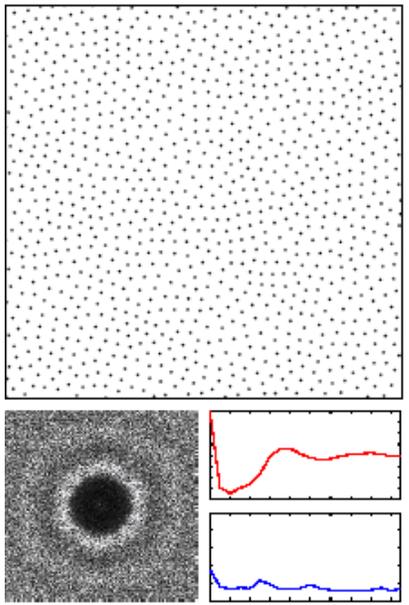


Fig. 6. Conjunto de 1024 puntos con distribución Poisson disk y $\alpha = 0.75$ generada por el lanzamiento de dardos relajado.

En la figura 6 se muestran distribuciones Poisson disk generadas por la relajación en el lanzamiento de dardos seguido por la relajación de Lloyd. El promedio radial del espectro de potencia de una distribución Poisson disk tiene una estructura específica (Lagae y Dutré 2005). El pico DC es seguido por una región de baja energía. A esta región le sigue una transición y fin de la baja frecuencia que corresponde al radio del disco, seguido por una región plana de alta frecuencia, en la cual la mayor parte de la energía está contenida. Las estadísticas del radio y periodogramas son los primeros tópicos para evaluar la calidad de las distribuciones Poisson disk. La figura 1 producida por tiling periódico, produce patrones repetitivos de puntos, y por ello una anisotropía muy alta y un periodograma muy diferente al idóneo.

C. Algoritmos incrementales

Dunbar y Humpherys 2006 proponen el algoritmo que ellos nombran *muestreo de bordo* (Boundary sampling), que es un algoritmo incremental donde cada nuevo candidato se elige de una región de distancia r , a uno de los puntos ya existentes. Utilizan una relación de generación ordenada y definida por la vecindad disponible para cada punto $p \in P$ como

$$N_p = D(p, 4r) - \cup_{p' \in P} \left\{ \begin{array}{ll} D(p', c_a r), & p' < p \\ D(p', 2r), & p' \geq p \end{array} \right\}$$
 con $2 < c_a \leq 4$ y donde $D(x, r)$ describe al disco de radio r alrededor del punto x .

La vecindad disponible es $N = \cup_{p \in P} N_p$ que puede observarse en la figura 7.

Cada conjunto disjunto N_p lo calculan usando la sustracción booleana entre los discos.

Un caso especial se da cuando c_a toma el valor mínimo ($c_a = 2$). En este caso, la vecindad disponible de cada punto

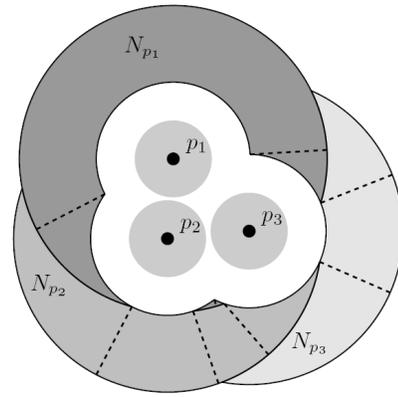


Fig. 7. Una porción del conjunto de puntos y su vecindad disponible con $c_a = 4$ (Dunbar y Humpherys 2006)

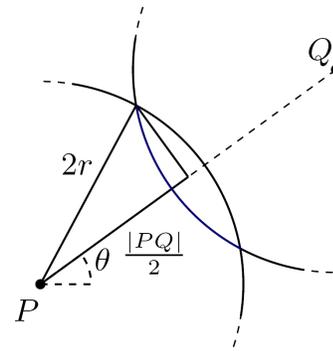


Fig. 8. P y Q son puntos en el conjunto Poisson disk, usando el radio r . El rango angular que P oculta de Q (dibujado en azul) puede calcularse fácilmente por geometría (Dunbar y Humpherys 2006)

se limita a una colección de arcos circulares centrados en los puntos, al que llaman *bordo disponible*.

Se elige un nuevo candidato en una posición aleatoria a lo largo del bordo disponible. Una vez que un candidato fue elegido, el bordo disponible tiene que ser recalculado con la intersección del círculo del candidato con sus vecinos inmediatos. Si el punto candidato es P y Q es un vecino con coordenadas polares (d, θ) , entonces el rango del ángulo que P oculta es $(\theta - \text{Cos}^{-1}(\frac{d}{4r}), \theta + \text{Cos}^{-1}(\frac{d}{4r}))$ como se observa en la figura 8.

Después que los rangos válidos se han determinado, puede agregarse nuevos puntos repitiendo el proceso en las posiciones disponibles del bordo, hasta que el bordo disponible quede vacío.

Agregar un nuevo punto solo requiere restar un rango angular del bordo del candidato. Este algoritmo como se puede apreciar, corre en un tiempo $O(N)$.

Jones 2006 construye un conjunto de puntos de forma también incremental, almacenando las regiones Voronoi de los puntos vecinos en un árbol balanceado, e insertando puntos en estas regiones uno a uno. Este algoritmo al utilizar regiones Voronoi tiene un costo $O(N \log N)$ y es un algoritmo que asegura su término (no quedarán espacios en los que pueda

insetarse un nuevo punto sin romper la restricción de distancia mínima).

Bridson 2007 propone un algoritmo similar a Dunbar y Humphreys, donde los puntos candidatos se dibujan solo en la región cercana a los puntos existentes, pero en lugar de calcular la región válida, se usa el rechazo sobre mallas rectangulares para irlos descubriendo. En ninguno de los tres métodos es posible asociar una jerarquía o rango a cada punto, pues se van creando alrededor de los puntos ya existentes y no representan como en el lanzamiento de dardos y tiling Wang un orden de importancia conforme se fueron descubriendo.

III. USO EN REGENERACIONES NO-FOTORREALISTAS

Stippling es una técnica de ilustración, donde con la cuidadosa colocación de pequeños puntos de tinta, se simulan intensidades. Un método para calcularlo automáticamente a partir de una función de densidad de entrada (imagen en tonos de gris), es el algoritmo de distribución inversa descrita por Secord et al 2002 y conocida en la bibliografía como técnica de Monte Carlo. Las posiciones con distribución Poisson disk calculada por cualquiera de los algoritmos descritos, se usan para muestrear y redistribuir de acuerdo a la función de entrada.

Otra alternativa para crear imágenes stippling con buenos resultados, se puede construir al utilizar el valor ordinal que algunos algoritmos (lanzamiento relajado de dardos y tiling no-periódico de Wang) asocian a cada punto, conforme se van generando. Siguiendo esta idea, se despliegan solo los puntos cuyo rango no excede la densidad de entrada en la posición correspondiente. En zonas oscuras, muchos puntos cumplirán la restricción, mientras que en zonas claras solo los puntos de valor ordinal inicial (en esas posiciones), serán menores a la densidad destino. La imagen 8 fue construida utilizando el tiling no-periódico de Wang.

El puntillismo es una técnica artística posimpresionista que utiliza la cuidadosa yuxtaposición de puntos con colores puros, que mirados a una distancia conveniente, crean en la retina las combinaciones deseadas. Resulta clara la implicación de una distribución de puntos sin patrones no inherentes a la imagen, como la ofrece la distribución Poisson disk, en la creación automatizada de imágenes puntillistas.

Comparativamente, los métodos de muestreo del borde y tiling no-periódico de Wang ofrecen mejores características de desempeño al calcular conjuntos de puntos con distribución Poisson disk sin repercusiones en la calidad. El primero es de orden lineal y produce 200,000 puntos por segundo en una computadora convencional (P4 de 3GHz) sin la necesidad de cálculos previos. Por su lado, Kopf et al 2006 alcanzan velocidades del orden de millones de puntos por segundo, una vez que se calcularon los puntos de los tiles base. Además al utilizar el tiling no-periodico de Wang es posible asociar un rango a cada punto.

La característica de contar con una jerarquía asociada a cada punto del conjunto, es importante en el muestreo. Particularmente porque esta jerarquía puede ser usada para colocar la



Fig. 9. Los puntos desplegados corresponden a posiciones con rango menor al de la función de densidad original.

cantidad de puntos exacta de acuerdo a la densidad requerida y producir la invarianza al escalamiento, una propiedad que es muy importante en la producción de gráficos.

En la figura 9 se muestra la representación de la imagen siguiendo el procedimiento con tiling de Wang para calcular los puntos y con ellos simular el puntillismo. Este procedimiento permitió construir la imagen puntillista con diferentes escalas, insertando nuevos puntos de acuerdo a la jerarquía asociada. Los tiempos requeridos se consumen principalmente en tareas como el cálculo del color promedio de la zona de influencia de cada punto, más que la misma distribución de puntos.

Aunque solo se presentaron las técnicas del stippling y el puntillismo, existen en NPR otras técnicas (como el hatching, cross-hatching, mosaicos, esbozos a tinta y lápiz, caricaturas, etc.) donde se utilizan otros primitivos gráficos (segmentos de recta, polígonos, pequeñas imágenes, trazos cortos, curvas, texturas etc.) en los cuales sigue siendo un tópico importante la distribución de esos primitivos gráficos.

IV. CONCLUSIONES

Dos de los algoritmos más eficientes para producir conjuntos de puntos con distribución Poisson disk son el muestreo de bordes y el tiling no-periódico de Wang. Este último con la ventaja de poder asociar una jerarquía a cada punto conforme se fueron generando. La distribución Poisson disk es fundamental para la producción de imágenes no-fotorrealistas de diferentes técnicas, como el stippling y el puntillismo.

La jerarquía que se asocia al conjunto de puntos es fundamental para producir gráficos invariantes al escalamiento.

REFERENCES

- [Bridson 2007] Bridson Robert. **Fast Poisson Disk Sampling in Arbitrary Dimensions**. ACM SIGGRAPH 2007. Sketches Program.
- [Cook 1986] Cook, R. L. **Stochastic sampling in computer graphics**. Computer Graphics (proceedings of ACM SIGGRAPH 86), V5, N1, PP 51-72
- [Dunbar y Humpherys 2006] Dunbar Daniel y Humpherys Greg. A Spatial Data Structure for Fast Poisson-Disk Sample Generation. ACM SIGGRAPH 2006 Transaction on graphics. 25, 3, 503–508
- [Hiller et al 2001] Hiller Steafan, Deussen Oliver y Keller Alexander. **Tilled Blue Noise Samples**. Proceedings Vison Modeling and Vizualization 2001, pp 265-272
- [Jones 2006] Jones Touis R. **Efficient Generation of Poisson-Disk Sampling**. Journal of Graphics Tools 2006
- [Kopf et al 2006] Kopf Johannes, Cohen-Or Daniel, Deussen Oliver, Lischinski Dani. **Recursive Wang Tiles for Real-Time Blue Noise**. ACM Transactions on Graphics Proceedings of SIGGRAPH 2006, v25, n 3, pp 509-518
- [Lagae y Dutré 2005] Lagae Ares y Dutré Philip **A Procedural Object Distribution Function**. ACM Transactions on Graphics v24, n4 pp 1442-1461
- [McCool y Fiume 1992] McCool, M y Fiume E. **Hierarchical Poisson disk sampling distributions**. Graphic interface '92, pp 94-105
- [Secord et al 2002] Secord Adrian, Heidrich Wolfgang and Streit Lisa. **Fast primitive distribution for illustration**. 13th Eurographics Workshop on Rendering 2002 (EGRW 2002)
- [Wikipedia 2007] http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution



a)



b)



c)

Fig. 10. Representación puntillista a diferentes escalas a) Imagen con 16320 puntos calculada en 61 ms. b) Acercamiento de una zona de interés con una velocidad de 51 ms. c) Nuevo acercamiento con una regeneración de 53 ms a razón de 308 000 puntos por segundo.